

3. ESERCIZI

Risolvi i seguenti problemi sull'iperbole.

LIVELLO BASE

1. Stabilisci quali fra le seguenti equazioni hanno come grafico una iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

a) $y = \frac{2}{x}$

b) $4x^2 - 4y^2 = 8$

c) $x^2 + y^2 = 1$

d) $xy = -3$

e) $y = 3x$

f) $x^2 - 25 = y^2$

g) $y^2 - x^2 = -1$

h) $y = -\frac{5}{x}$

2. Dopo aver determinato le coordinate dei vertici rappresenta graficamente le seguenti iperboli equilatera riferite ai propri asintoti:

a) $4xy + 1 = 0$

b) $xy = \frac{3}{2}$

c) $y = \frac{2}{x}$

d) $y = -\frac{4}{x}$

e) $xy = 4$

f) $xy - 5 = 0$

3. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti passante per il punto $P(4; 1)$. $S = \{xy = 4\}$

4. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti passante per il punto $P(-5; -2)$. $S = \{xy = 10\}$

5. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti passante per il punto $P(3; -4)$. $S = \{xy = -12\}$

6. Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $A(-1; 2)$. Determinare poi i vertici della curva. $S = \{xy = -2\}$

7. Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $P(2; 3)$. Determinare poi i vertici della curva. $S = \{xy = 6\}$

8. Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $A(-4; -1)$. Determinare poi i vertici della curva. $S = \{xy = 4\}$

9. Delle seguenti funzioni omografiche individua: le equazioni degli asintoti, le coordinate del centro di simmetria, le coordinate dei vertici e le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi cartesiani; quindi tracciane il grafico.

a) $y = \frac{2}{x-1}$

b) $y = \frac{-3}{x-1}$

c) $y = \frac{x-2}{x+1}$

d) $y = \frac{2x+1}{x-3}$

e) $y = \frac{2-x}{6x}$

f) $y = \frac{3-2x}{x+2}$

g) $y = \frac{-5x-10}{2x-1}$

h) $y = -\frac{x+6}{4x}$

i) $y = -\frac{2x+5}{3-2x}$

LIVELLO INTERMEDIO

10. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha un fuoco nel punto $F(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. $S = \{xy = 1\}$

11. Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti che ha un fuoco nel punto $F(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. $S = \{xy = -1\}$

12. Determina l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti che ha un fuoco in $F(2; 2)$. Trova quindi i punti d'intersezione con la bisettrice del primo e terzo quadrante. $S = \{xy = 2\}$

13. Determina l'equazione delle iperboli equilatera riferite ai propri asintoti che verificano le seguenti condizioni:

a) ha un vertice nel punto $V\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$;

$S = \{xy = -\frac{9}{4}\}$

b) passa per il punto $P(-2; 5)$;

$S = \{xy = -10\}$

c) passa per il punto $P(-1; -\sqrt{3})$;

$S = \{xy = \sqrt{3}\}$

d) incontra la retta di equazione $y = -3x$ nel punto di ascissa 2.

$S = \{xy = -12\}$

14. Determina le intersezioni tra la retta di equazione $x - y - 6 = 0$ e la funzione omografica $y = \frac{2x}{x-3}$. $S = \{A(2; -4); B(9; 3)\}$

15. Determina le intersezioni tra la retta di equazione $2x - y + 1 = 0$ e la funzione omografica $y = \frac{x}{x+2}$. $S = \{A(-1; -1)\}$

16. Determina le intersezioni tra la retta di equazione $y = x - 1$ e la funzione omografica $y = \frac{x+7}{x-2}$ quindi calcola la distanza tra i due punti trovati. $S = \{A(5; 4); B(-1; 2); \overline{AB} = 2\sqrt{10}\}$

17. Dopo aver trovato l'intersezione tra l'iperbole $y = \frac{40}{x}$ e la retta $2x - 3y - 8 = 0$ calcola la

lunghezza del segmento che ha come estremi i punti d'intersezione determinati.

$$S = \left\{ A \left(-6; -\frac{20}{3} \right); B(10; 4); \overline{AB} = \frac{16}{3}\sqrt{13} \right\}$$

LIVELLO AVANZATO

18. Trova l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli asintoti con vertice nel punto $V(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, determina quindi le intersezioni dell'iperbole con la retta $y = -2x + 5$ e l'area del quadrilatero $ABCD$, dove C e D sono i simmetrici rispettivamente di A e di B rispetto all'origine degli assi.

$$S = \left\{ xy = 2; A \left(\frac{1}{2}; 4 \right); B(2; 1); area = 15 \right\}$$

19. Determina le coordinate dei punti d'intersezione dell'iperbole $xy = 6$ con la retta $y = -3x + 9$. Calcola quindi l'area del quadrilatero avente per vertici questi punti ed i loro simmetrici rispetto al centro di simmetria dell'iperbole stessa.

$$S = \{A(2; 3); B(1; 6); area = 18\}$$

20. Determina le intersezioni dell'iperbole $xy - 8 = 0$ con la retta $y = -x + 6$ e calcola l'area del triangolo avente per vertici l'origine degli assi e i punti d'intersezione trovati.

$$S = \{A(2; 4); B(4; 2); area = 6\}$$

21. Determina per quale valore di k l'iperbole $xy = k$ interseca la retta di equazione $y = -x + 10$ in due punti che hanno distanza $6\sqrt{2}$.

$$S = \{k = 16\}$$

22. Determina la funzione omografica del tipo $y = ax + \frac{b}{x}$ passante per i punti $A(1; 0)$ e $B(2; 3)$.

$$S = \left\{ y = 2x - \frac{2}{x} \right\}$$

23. Determina la funzione omografica del tipo $y = ax + \frac{b}{x}$ passante per i punti $A(-1; 0)$ e $B(3; 2)$.

$$S = \left\{ y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4x} \right\}$$

24. Traccia il grafico delle seguenti funzioni costo unitario:

a) $y = 2x + \frac{24}{x}$

b) $y = 5x + \frac{35}{x}$

c) $y = x + \frac{20}{x}$

d) $y = 60x + \frac{80}{x}$

e) $y = x + \frac{45}{x}$

f) $y = 5x + \frac{40}{x} + 5$

g) $y = x + \frac{30}{x} + 3$

- 25.** Una fabbrica di strumenti musicali sostiene mensilmente un costo fisso di 56.800 € e costi variabili di 120 € per ogni strumento prodotto a cui devono essere aggiunte le spese di trasporto e pubblicità quantificabili, in euro, nel doppio del quadrato del numero di strumenti musicali prodotti. Trova :
- a) la funzione del costo totale;
 - b) la funzione del costo unitario;
- e rappresentale graficamente.
- 26.** Una ditta di noleggio sostiene ogni anno dei costi per ogni automezzo di cui dispone; dovuti a:
- spese fisse di gestione (bollo, assicurazioni ecc.) di 3.500 annue;
 - spese per riparazioni varie pari al 2‰ del quadrato dei chilometri percorsi dall'automezzo.

Dopo aver determinato la funzione del costo totale e del costo unitario rappresenta graficamente le funzioni trovate.